dispersiveとdissipative(テクニカル・タームの解説)

テクニカル・タームの解説

" dispersive と dissipative "

京大理　角 谷 典 彦

プリズムを通った日光が七色にわかれることは小学生でもよく知っている。波の分散（dispersion）という概念はもともとこの光の分散に由来するものと思われる。これとの類似で，一般に波の位相速度が波長または振動数によって変化する現象を波の分散といい，そのような波を伝える媒質を分散媒質と呼んでいる。分散性媒質中を波が伝播するときには一般にエネルギーの減衰を伴うのが普通である。たとえば，圧縮性完全流体中の音波は分散を示さないが，粘性を考慮すると分散が現われ，かつ波の進行に伴って振幅が減衰する。この減衰は音波のエネルギーが粘性のために熱エネルギーに変換されることによる。一般に力学的エネルギーが熱エネルギーに変ることをエネルギーの散逸（dissipation）と呼んでいる。したがって，完全流体は音波の伝播に対して非分散性の媒質であるが，粘性流体は散逸を伴う分散性媒質であると言える。

ところで，最近非衝突プラズマ中の非線型波動伝播等に関連して散逸を伴わない純分散性の波が注目されるようになった。[1] この点を強調して非散逸性の分散波のことをとくに " dispersive wave " と呼ぶことがある。すなわち線型分散式において振動数 $\omega(k)$ が波数 k の実函数であるような波のことを " 分散波 " と呼ぶのである。[2] もちろん特別な場合として ω が k に比例するときには，位相速度 ω/k は const になるから分散は零である。したがって，$D \equiv \partial(\omega/k)/\partial k$ が分散の目安を与える（実際 D は位相速度 ω/k と群速度 $\partial\omega/\partial k$ との差を反映している！）。D の正・負に応じてそれぞれ正・負の分散という。散逸を伴うときには D に虚部が現れる。先にあげた粘性流体中の音波はその一例である。したがって，粘性流体中の音波はここでいう意味では " 分散波 " ではない。つまり一般に広い意味での分散波においては D は複素型になり，その実部がここでいう " 分散 " の，その虚部が " 散逸 " の目安を与えることになる。

最も簡単な分散型非線型方程式の典型は Korteweg－de Vries 方程式：

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}=\varepsilon\frac{\partial^3 u}{\partial x^3},\qquad (\varepsilon：実数), \tag{1}$$

であり，散逸型の典型は Burgers 方程式：

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}=\nu\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\qquad (\nu：正の実数), \tag{2}$$

である。実際，一様状態 $u=u_0=\mathrm{const}$ のまわりに正弦波型の微小振幅波を仮定して線型分散式をつくると，

$$\left.\begin{array}{ll}(1)\text{ からは} & \omega=ku_0+\varepsilon k^3,\\ (2)\text{ からは} & \omega=ku_0-i\nu k^2,\end{array}\right\} \tag{3}$$

が得られる。したがって，ε は ω と k との比例関係からのズレすなわち“分散”を表わすパラメターであり，一方 ν はそのズレが純虚数すなわち“散逸”を表わすパラメターになっている。方程式(1)は Korteweg－de Vries が浅い水の波を調べたときに出した方程式で[3]，同じ型の方程式が，ある近似のもとで，非衝突プラズマ中を伝わる磁気音波[4]やイオン音波[5]の場合にも得られる。一方，方程式(2)は Burgers が粘性流体力学のモデル方程式として提唱[6]したもので，一次元 Navier－Stokes 方程式の圧力項をおとしたものに等しい。方程式（1），（2）において右辺の分散項・散逸項は，いずれも $u(x,t)$ の高次空間微分の項であるから，それらは u が空間的に急激に変化するときに重要になってくる。いいかえると，波数の大きい（短波長の）波に対してよく効く（分散式(3)を参照）。したがって最初 u が空間的にゆっくり変化するなめらかな函数であれば，（1），（2）の右辺は無視できて同一の方程式：

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}=0, \tag{4}$$

とかけるであろう。この方程式の解は，第２項の非線型項のために，たとえゆるやかに変化するなめらかな初期値から出発しても，ある有限時間の後に“つったち”をおこす。実際(4)の解は，f を任意函数として $u=f(x-ut)$ とかけるから，u の大きい部分は小さい部分にくらべて速く伝わるからであ

る。こうしてある時間の後にuには空間微分の大きい部分が発生し，(1)，(2)の右辺の分散項・散逸項は無視できなくなり，その後の波の伝わり方は(1)と(2)とではがらりとかわる。すなわち(2)ではこのつったちは散逸項と釣合って衝撃波をつくり，[6),7)] (1)では分散項と釣合って弧立波がつぎつぎにつくりだされる。[8)] したがって，非線型波動の伝播を論じる際には分散や散逸を表わすパラメターε，νがいかに小さくても（実際適当な無次元化を行うと，物理的に興味ある多くの場合にε，νは小さい。）それらが演じる役割はきわめて重要である。多くの実在の物理系においては，ここで定義した意味での"分散"と"散逸"とが共存する（すなわちはじめに述べた広い意味での分散/）場合が多く，数学的には微分方程式の高階微係数に小さいパラメターがかかる形になるので，分散と散逸のいずれが優越するかによって微妙な極限操作を含む問題を提起する。[9)]

参 考 文 献

1) 谷内俊弥：京大数理研講究録 10 (1966) 20，
矢島信夫：京大数理研講究録 24 (1967) 45，
角谷典彦：日本物理学会誌　流体物理特集号（1968秋発行予定）。

2) G.B.Whitham: Proc. Roy. Soc. A283 (1965) 238.

3) D.J.Korteweg and G.de Vries: Phil. Mag. (5) 39 (1895) 422.

4) C.S.Gardner and G.K.Morikawa: Courant Inst. Math. Sci. Rep. No. NYO 9082 (1960),
Yu.A.Berezin and V.I.Karpman: Soviet Phys. JETP 46 (1964) 1880,
T.Kakutaui, H.Ono, T.Taniuti and C.C.Wei: Journ. Phys. Soc. Japan 24 (1968) 1159.

5) H.Washimi and T.Taniuti: Phys. Rev. Letters 17 (1966) 996.

6) J.M.Burgers: Adv. Appl. Mech. 1 (1948) 171.

角谷典彦

7) J.D.Cole : Quart. Appl. Math. 9 (1951) 225.

8) N.J.Zabusky and M.D.Kruskal : Phys. Rev. Letters 15 (1965) 240

Yu. A.Berezin and V.I.Karpman : Soviet Phys. JETP 51 (1966) 1557

9) N.Yajima, A.Outi and T.Taniuti : Prog. Theo. Phys. 35 (1966) 1142

なお，Burgers 方程式の数学的諸性質については，

E.Hopf : Comm. Pure Appl. Math. 3 (1950) 201, Korteweg－de Vries 方程式の最近の研究については，

C.S.Gardner, J.M.Green, M.D.Kruskal and R.M.Miura : Phys. Rev. Letters 19 (1967) 1095,

R.Miura : to be published in Comm. Pure Appl. Math

R.Miura, C.S.Gardner and M.D.Kruskal : to be published in Comm Pure Appl. Math.,

非線型方程式系を Korteweg－de Vries または Burgers 方程式に帰着させ得る場合の数学的研究については

T.Taniuti and C.C.Wei : Journ. Phys. Soc. Japan 24 (1968) 941,

非線型波動伝播については，

A.Jeffrey and T.Taniuti : Nonlinear wave propagation (1964) Acad. Press

を参照されたい。